Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1 (25 points)

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$

2) Simplifier au maximum :

$$A=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+....+\frac{10}{2^{10}}\ ;$$

$$B=2023+\frac{4046}{2}+\frac{6069}{4}+\frac{8092}{8}+....+\frac{20230}{2^9}\ .$$

Corrigé

1) $\frac{n}{2^n}=\frac{2(n+1)-(n+2)}{2^n}=\frac{2(n+1)}{2^n}-\frac{n+2}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$

2) D'après la question précédente on a :

$\frac{1}{2}=\frac{2}{2^0}-\frac{3}{2^1}$

$\frac{2}{2^2}=\frac{3}{2^1}-\frac{4}{2^2}$

$\frac{3}{2^3}=\frac{4}{2^2}-\frac{5}{2^3}$

…

$\frac{10}{2^{10}}=\frac{11}{2^9}-\frac{12}{2^{10}}$

Barème Exercice 1	
1) Démonstration de $\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$	10 pts
2) Simplification de A	6 pts
Simplification de B	6 pts
Raisonnement et présentation	3 pts

La somme membre à membre donne, après simplification, $A=2-\frac{12}{2^{10}}=2-\frac{3}{2^8}=\frac{509}{256}$

3)On peut remarquer que B est factorisable par 2023

$$\begin{aligned}B&=2023+\frac{4046}{2}+\frac{6069}{4}+\frac{8092}{8}+....+\frac{20230}{2^9}\\&=2023\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+....+\frac{10}{2^9}\right)\\&=4046\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+....+\frac{10}{2^{10}}\right)\\&=4046A\\&=4046.\frac{509}{256}\\&=\frac{2023\times509}{128}\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit x un réel inférieur à 2, on donne $F(x)=\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}}$

1) Calculer $F\left(2-\sqrt{3}\right)$ **et** $F\left(2-\sqrt{2}\right)$

2) Ecrire $F(x)$ **sous la forme** $ax+b$ **où a et b sont des entiers.**

3) Calculer le nombre $B=\sqrt{4+2023\sqrt{4+2025\sqrt{1+2028\times2030}}}$

Barème Exercice 2	
1) Calcul de $F(2-\sqrt{3})$	6 pts
Calcul de $F(2-\sqrt{2})$	6 pts
2) Ecriture de F(x)	5 pts
3) Calcul de B	5 pts
Raisonnement & Présentation	3 pts

Corrigé

1) Pour $x=2-\sqrt{3}$ **on a** $\sqrt{1+(x-5)(x-7)}=\sqrt{19+8\sqrt{3}}=\sqrt{(4+\sqrt{3})^2}=4+\sqrt{3}$ **et** $4-(x-2)=4+\sqrt{3}$

Donc $\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}=\sqrt{4+\sqrt{3}(4+\sqrt{3})}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ **d'où**

$F\left(2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{4-(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\sqrt{3}$

Par identification on a $F\left(2-\sqrt{2}\right)=\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{2}$

2) $F(x)=\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}}$

On a $1+(x-5)(x-7)=x^2-12x+36=(x-6)^2$ donc $\sqrt{1+(x-5)(x-7)}=|x-6|=6-x$ et par conséquent on a

$\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}=\sqrt{4-(x-2)(6-x)}=\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-4)^2}=|x-4|=4-x$

D'où $F(x)=\sqrt{4-x(4-x)}=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=2-x$

Conclusion $F(x)=-x+2$

3) Le nombre $B=\sqrt{4+2023\sqrt{4+2025\sqrt{1+2028\times 2030}}}=F(-2023)=2023+2=2025$. Donc $\boxed{B=2025}$.

Exercice 3

Soient a, b, c et d des réels tels que $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}=\frac{2022}{2023}$

1) Ecrire $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}-1$ sous forme de quotient de deux expressions factorisées.

2) Déduire que $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}=\frac{-1}{2022}$

Corrigé

1) on a :

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}-1=\frac{\cancel{ac}-ad-bc+\cancel{bd}-\cancel{bd}+ab+cd-\cancel{ac}}{bd-ab-cd+ac}$$

$$=\frac{ab+cd-ad-bc}{bd-ab-cd+ac}$$

$$=\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(d-a)}$$

Barème Exercice 3	
1) Ecriture de $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}-1$	12 pts
2) $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}=\frac{-1}{2022}$	10 pts
Raisonnement et présentation	3 pts

2) $$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}=\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(d-a)}\div\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}$$

* $$=\left(\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}-1\right)\div\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}\Rightarrow\boxed{\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}=\frac{-1}{2022}}$$

$$=\left(\frac{2022}{2023}-1\right)\div\frac{2022}{2023}$$

Exercice 4 (25 points)

ABCD est un carré de côté 8 cm et H est le milieu du côté $[AD]$.

Le segment $[BE]$ et le demi-cercle de centre H sont tangents en G.

On pose $DE=x$.

1) Montrer que (HE) est la médiatrice du segment $[DG]$.

2) Prouver que les triangles HAB et HGB sont superposables.

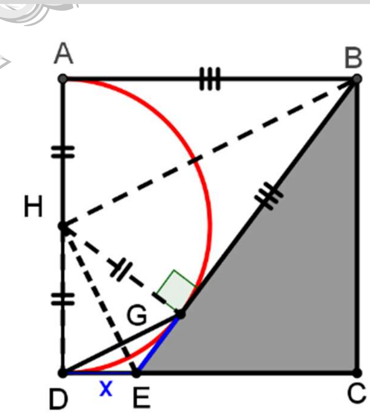
3) En déduire la valeur de x puis calculer l'aire du triangle BCE.

Barème Exercice 4	
1) (HE) = med[DG]	7 points
2) HAB et HGB superposables	7 points
3) Valeur de x	4 points
Aire de BCE	4 points
Raisonnement et présentation	3 points

Corrigé

1) Les triangles HDE et HGE sont rectangles ayant un côté commun et deux côtés de même mesure $(HD=HG)$ alors ils sont superposables d'où $ED=EG$ en plus $HD=HG$ d'où $(HE)=\text{med}[DG]$.

2) Les triangles HAB et HGB sont rectangles ayant un côté commun et deux côtés de même mesure $(HG=HA)$ ils sont donc superposables.



3) D'après les questions précédentes on a : $DG=DE=x$ et $GB=AB=8$ donc $EB=x+8$ or $EC=8-x$ et d'après Pythagore on a

$EB^2=EC^2+CB^2\Leftrightarrow(x+8)^2=(8-x)^2+8^2\Leftrightarrow x=2$

Donc l'aire du triangle BCE est $\frac{6\times 8}{2}=24\text{cm}^2$.